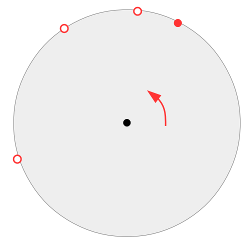
## Funciones periódicas

Las funciones de una variable x pueden tener comportamientos muy distintos cuando x se hace muy grande: las funciones polinomiales se aproximan a $\infty$ o $-\infty$ y las funciones racionales se aproximan a $\infty$ o $-\infty$ o se aproximan a algún valor fijo. Pero hay muchas otras posibilidades.

Algunas funciones vuelven a tomar los mismos valores de manera repetida, de modo que conociendo su comportamiento en un intervalo podemos saber como son siempre.
Una función $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ es periódica si existe un número real $r$ tal que $f(x+r)=f(x)$ para toda $x$ en $\mathbf{R}$.

Ejemplo. Si $p$ es un punto de un disco que gira a velocidad constante, la altura de $p$ es una función periódica, que se repite cada vez que el disco da una vuelta. ¿Que función será?
Por la discusión anterior no puede ser un polinomio ni una función racional, tiene que ser algo distinto...

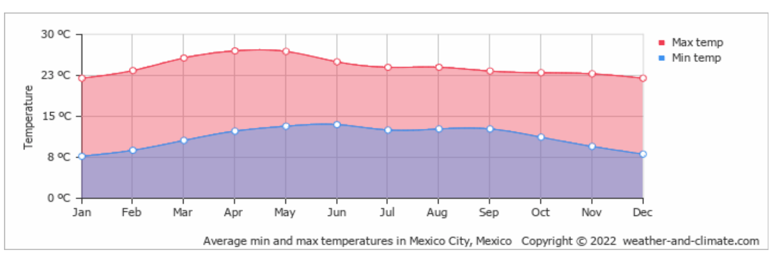


Muchas funciones que aparecen en la naturaleza son (aproximadamente) periódicas.

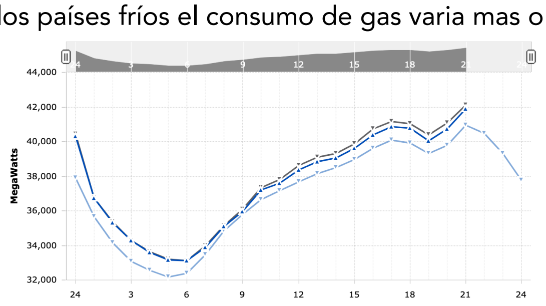
Ejemplos.

El ritmo cardiaco

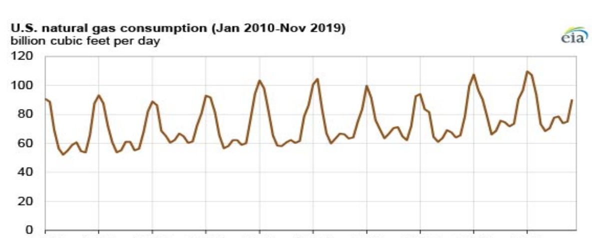

Las temperaturas varían periódicamente a lo largo del año (también a lo largo del día)




La demanda de electricidad varia mas o menos periódicamente a lo largo del día.
En los países fríos el consumo de gas varia mas o menos periódicamente a lo largo del año:

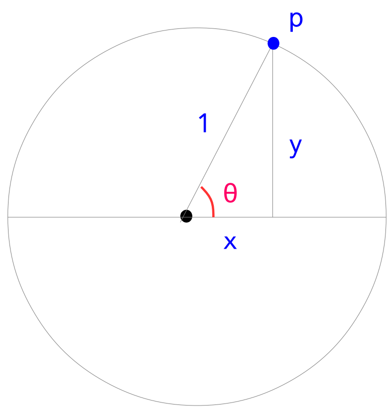


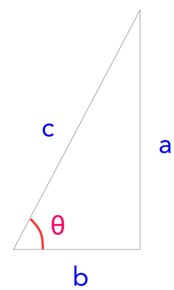

Demanda electrica en México el 13 de octubre de 2022



## Las funciones trigonométricas

Las coordenadas de un punto **p** en un círculo son funciones del ángulo θ que forma la línea del centro a **p** con la línea horizontal.




Las funciones trigonométricas dan las proporciones entre los lados de un triángulo rectángulo con ángulo θ:

sen(θ) = a/c  csc(θ) = c/a

cos(θ) = b/c  sec(θ) = c/b

tan(θ) = a/b  cot(θ)= b/a

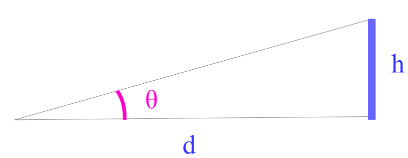
Los puntos del círculo de radio 1 (arriba y la derecha del centro) definen triángulos rectángulos con hipotenusa 1 y catetos x, y. Para estos triángulos cos(θ) = x/1 y sen(θ) = y/1 así que y = cos(θ) y y = sen(θ).
Así que las funciones cos(θ) y sen(θ) definidas para ángulos entre 0 y 90° dan justamente las coordenadas de los puntos del círculo. Para los ángulos menores que 0 o mayores que 90° *definimos* las funciones trigonométricas de la misma manera pero tomando en cuenta los signos. Así las funciones cos(θ) y sen(θ) den las coordenadas de los puntos del círculo para todos los ángulos.

Las funciones trigonométricas son los ejemplos mas simples de funciones periódicas (se repiten al dar la vuelta al círculo) y son de las mas útiles.

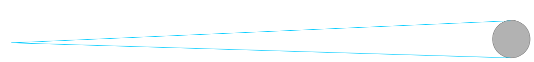
Las funciones trigonométricas tienen muchas aplicaciones prácticas que se estudian en los cursos de geometría

Ejemplo.
Para calcular la altura de una torre basta conocer la distancia a la torre y la tangente ángulo de elevación θ ya que

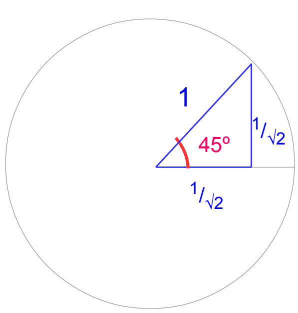
tanθ = h/d y por lo tanto h=d tanθ




Ejercicio.
El ángulo con que vemos a la luna es de aproximadamente 1/2 grado
¿que relación hay entre el diámetro de la luna y la distancia de la luna a la tierra?



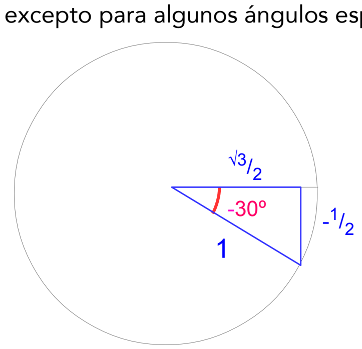
Calcular los valores de las funciones trigonométricas no es tan fácil, excepto para algunos ángulos especiales:




sen(45º) = $^1/_{\sqrt{2}}$

cos(45º) = $^1/_{\sqrt{2}}$

tan(45º) = 1




sen(-30º) = -$^1/_2$

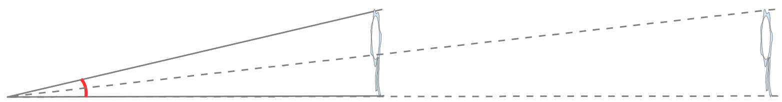
cos(-30º) = $^{\sqrt{3}}/_2$

tan(-30º) = -$^1/_{\sqrt{3}}$

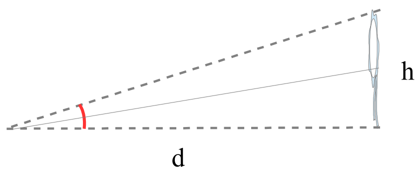
¿Cuanto valdrán sen(15º), cos(15º)  y  tan(15º) ? *NO son la mitad de* sen(30º), cos(30º)  y  tan(30º) !

Ejercicio. Cuando vemos un objeto su tamaño aparente depende del ángulo visual.

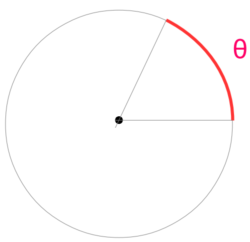
¿Si alguien se aleja al doble de distancia, que pasa con el ángulo? ¿se hace la mitad, o algo mas que la mitad o algo menos que la mitad? No se trata de adivinar sino de pensar en las funciones trigonométricas.



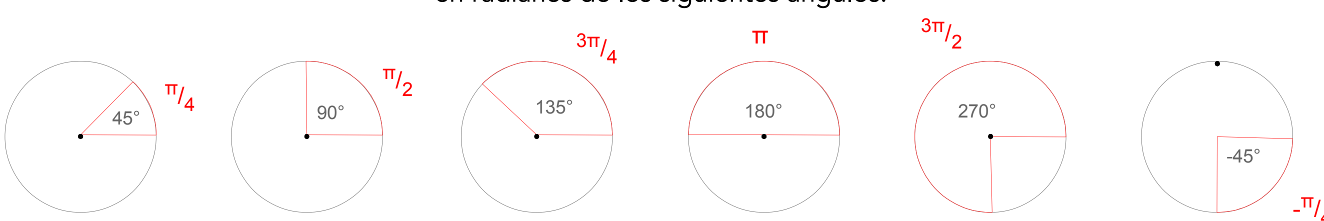
¿Si dos objetos están a la misma distancia y uno tiene el doble de altura que el otro, ¿que relación hay entre los ángulos que forman?



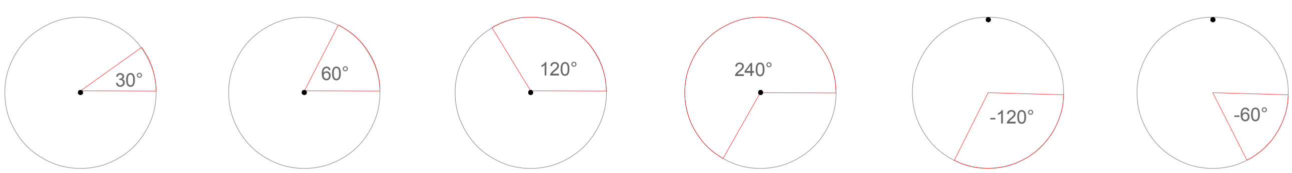

## Radianes




En matemáticas superiores y en particular en cálculo, los ángulos no se miden en grados sino en **radianes**, que miden la longitud del arco de círculo de radio 1 que da el ángulo. Mas adelante veremos por que esta es la mejor manera de medirlos.
Como la circunferencia del círculo de radio 1 mide $2\pi$, media circunferencia mide $\pi$, un cuarto mide $\pi/2$ , un octavo mide $\pi/4$, un sexto de circunferencia mide $\pi/3$  y un doceavo mide $\pi/6$. Esto da las medidas en radianes de los siguientes ángulos:




Ejercicio. Hallar la medida de estos ángulos en radianes




Ejemplo.  Las funciones trigonométricas de ángulos medidos en radianes

$\text{sen}(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ $\quad$ $\cos(\pi/4) = 1/2$ $\quad$ $\tan(\pi/4) = 1$ $\qquad$ $\text{sen}(-\pi/6) = -1/2$ $\quad$ $\cos(-\pi/6) = \sqrt{3}/2$ $\quad$ $\tan(-\pi/6) = -1/\sqrt{3}$

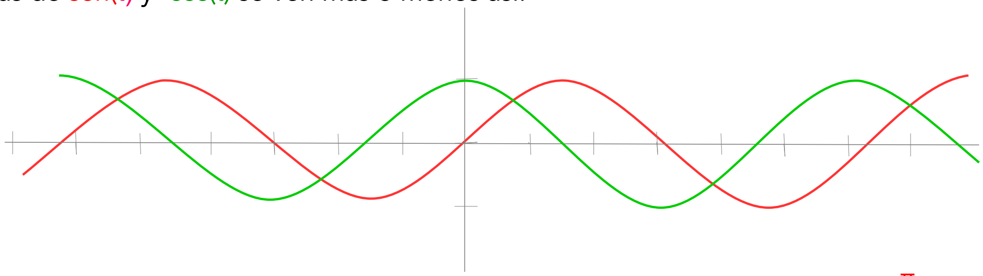
Ejercicio.  Calcular

$\text{sen}(\pi/3) =$ $\quad$ $\cos(2\pi/3) =$ $\quad$ $\tan(4\pi/3)=$ $\quad$ $\text{sen}(-\pi/4) =$ $\quad$ $\cos(-5\pi/4) =$ $\quad$ $\tan(-9\pi/4) =$

Si tienen dudas o quieren saber mas de trigonometría pueden ver https://www.matem.unam.mx/~max/GEA20/N3.pdf
Las funciones sen(t) y cos(t) están definidas para todos los valores reales de t.
Sólo toman valores entre -1 y 1 y por el teorema de Pitágoras $sen^2(t) + cos^2(t) = 1$.

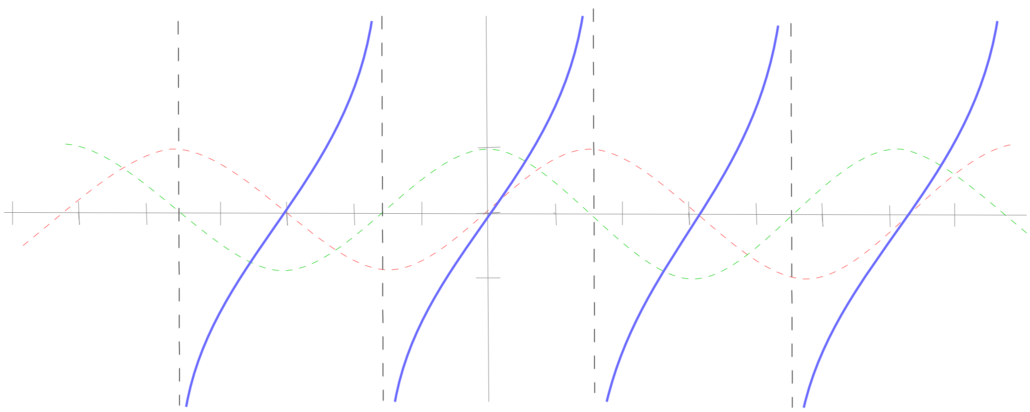
Las otras funciones trigonométricas solo están definidas cuando el denominador es distinto de 0 y pueden tomar valores muy grandes. Todas las funciones trigonométricas son periódicas con periodo $2\pi$ o $\pi$.

Las gráficas de sen(t) y cos(t) se ven mas o menos así:



Las gráficas de sen(t) y cos(t) tienen la misma forma, pero recorridas: $\cos(t) = \text{sen}(t+{}^{\pi}/_{2})$ ¿por que?

La función $\tan(t) = \text{sen}(t) / \cos(t)$ no está definida cuando $\cos(t)=0$, o sea para $t = \pm{}^{\pi}/_{2}, \pm{}^{3\pi}/_{2}, \pm{}^{5\pi}/_{2}, \pm{}^{7\pi}/_{2}, \ldots$
La gráfica de tan(t) se ve mas o menos así:

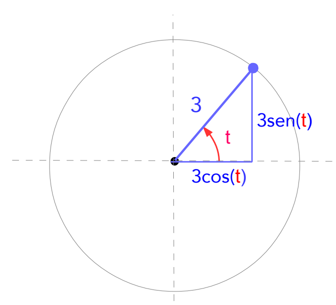


Ejercicio. ¿Como se verá la gráfica de sec(t)?

Las coordenadas de un punto **p**=(x,y) en un círculo con centro en el origen (0,0) y radio 1 están dadas por las funciones x= cos(t), y= sen(t) donde t es el ángulo que forma la línea del origen a **p** con la horizontal.

Ejemplo. ¿Que trayectoria sigue un punto cuyas coordenadas en el tiempo *t* son $x = 3\cos(t)$ $y = 3\text{sen}(t)$ ?

El punto se mueve alrededor del círculo de radio 3, en el sentido contrario a las manecillas del reloj y a velocidad constante. Como tarda $2\pi$ unidades de tiempo en recorrer la circunferencia, que tiene longitud $6\pi$, su velocidad es $6\pi/2\pi=3$

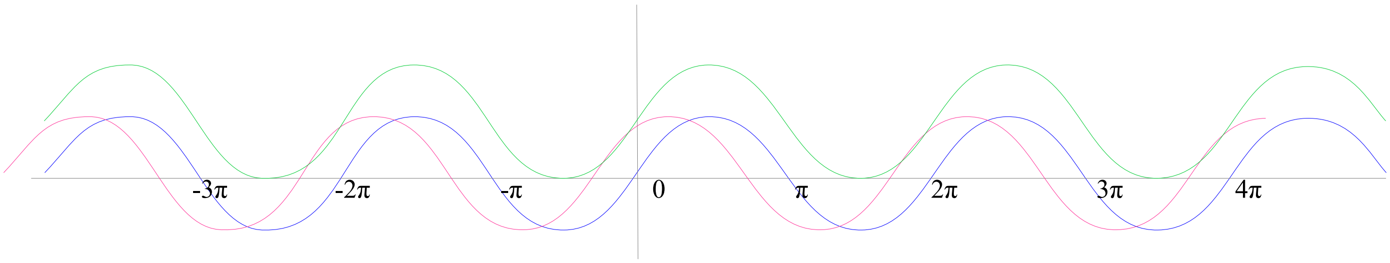



Ejercicio. Dar las coordenadas de un punto que gira alrededor del círculo de radio 5 en el sentido de las manecillas del reloj y a velocidad constante 2

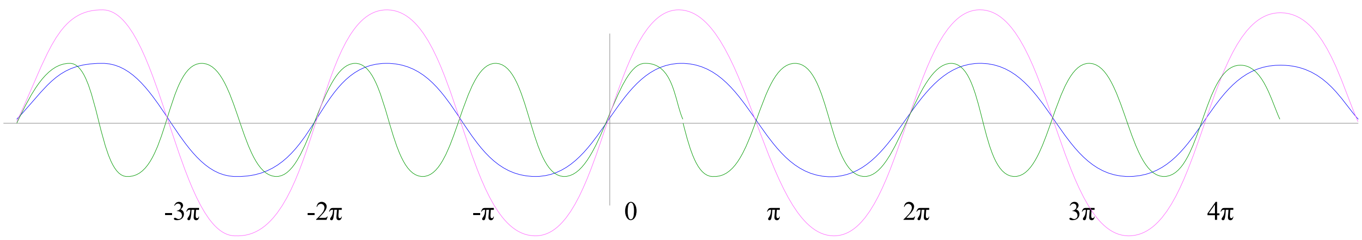
$x = 5\cos(-{}^{2}/_{5}\,t)$ $\quad y = 5\text{sen}(-{}^{2}/_{5}\,t)$

A partir de cualquier función real f(x) podemos obtener otras funciones sumando o multiplicando por constantes. También podemos sumar o multiplicar la variable antes de aplicar la función. Estos cambios corresponden a componer (antes o después) la función f(x) con las funciones s(x)=x+c o m(x)=cx.

Ejemplo. Las gráficas de las funciones sen(t), sen(t) +1 y sen(t+1) se ven así:

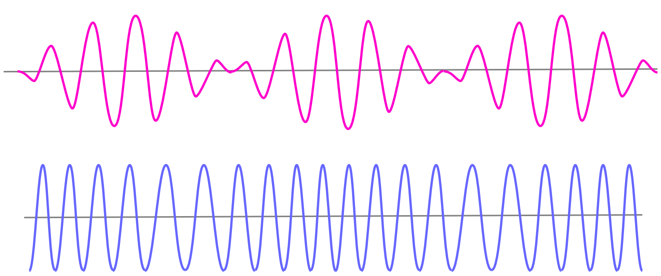



Ejercicio. ¿Como se ven las gráficas de las funciones sen(t), 2sen(t) y sen(2t) ?




Las ondas electromagnéticas simples son descritas por funciones de la forma f(t) = a sen(b(t+c)). Su *amplitud* esta dada por el factor a, su *frecuencia* (que es inversa al periodo) es proporcional a b, y su *fase* depende de c.

Las ondas electromagnéticas simples son sinusoidales, pero pueden modularse para transmitir información.
En AM (amplitud modulada) se mantiene fija la frecuencia y se varia la amplitud.
En FM (frecuencia modulada) se mantiene fija la amplitud y se varia la frecuencia cambiando el periodo.



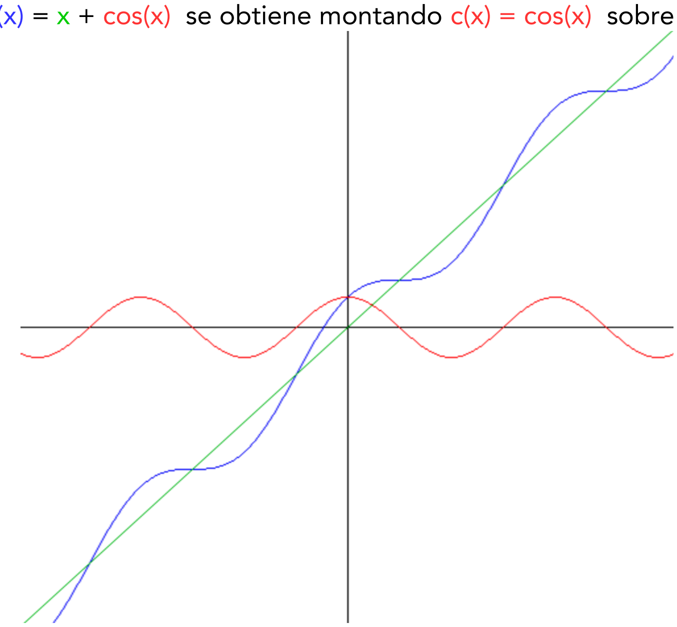
La *amplitud modulada* se ve como a(t)·sen(b·t) donde a(t) es la función que modula la amplitud y b es una constante. La *frecuencia modulada* se ve como a·sen(b(t)) donde b(t) es una función que modula la frecuencia y a es una constante.

Estas ideas que antes se usaron para las transmisiones analógicas de radio y TV ahora se utilizan para la transmisión de señales digitales en telefonía celular e internet.

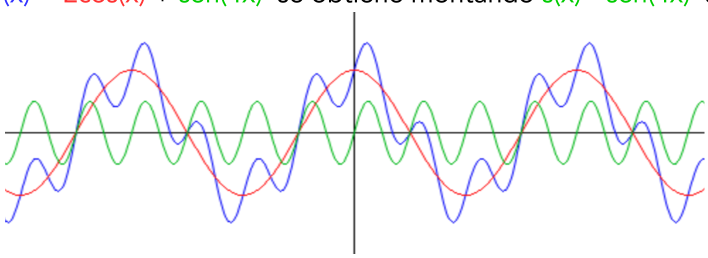
Ejercicio: Da funciones cuyas gráficas se vean como en el diagrama de arriba.

Combinando funciones trigonométricas se pueden obtener funciones mucho mas complicadas.

Ejemplo. La función $f(x) = x + \cos(x)$ se obtiene montando $c(x) = \cos(x)$ sobre $r(x) = x$ :

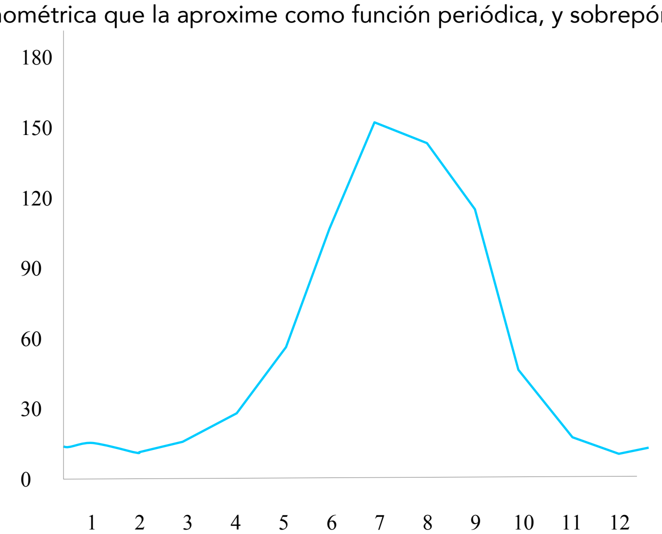


Ejemplo. La función $f(x) = 2\cos(x) + \mathrm{sen}(4x)$ se obtiene montando $s(x)= \mathrm{sen}(4x)$ sobre $c(x) = 2\cos(x)$ :



Todas las funciones periódicas de **R** en **R** pueden aproximarse sumando funciones trigonométricas de la forma $f(t) = a\ \mathrm{sen}(bt+c)$.

Ejercicio. Esta es la gráfica de la precipitación mensual promedio en la CDMX a lo largo del año. Da una función trigonométrica que la aproxime como función periódica, y sobrepón las gráficas para ver que tan bien la aproxima.



Funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas no son invertibles en todo su dominio porque no son inyectivas, pero si lo son si restringimos su dominio y codominio adecuadamente.

La función sen: $[-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1]$ es biyectiva y por lo tanto si es invertible. Su inversa es la función $\text{sen}^{-1}: [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$ que da los ángulos entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ correspondientes a los senos.

Ejemplos. $\text{sen}^{-1}(1)= \pi/2$ $\text{sen}^{-1}(0)=0$ $\text{sen}^{-1}(1/\sqrt{2})= \pi/4$ $\text{sen}^{-1}(-1/2)= \pi/6$

La función cos: $[0,\pi] \to [-1,1]$ es biyectiva y por lo tanto si es invertible. Su inversa es la función $\cos^{-1}: [-1,1] \to [0,\pi]$ que da los ángulos entre $0$ y $\pi$ correspondientes a los senos.

Ejemplos. $\cos^{-1}(1)=0$ $\cos^{-1}(0)= \pi/2$ $\cos^{-1}(1/\sqrt{2})= \pi/4$ $\cos^{-1}(-1/2)= 5\pi/6$

Ejercicio. ¿Donde son invertibles las funciones tan, sec y csc ?

## Problemas.

1. Traduce las medidas de los ángulos de grados a radianes y de radianes a grados (sin usar calculadora ni nada mas que la definición)

   a. 20° b. 110° c. $\pi/5$ rad d. $-\pi/18$ rad

2. Encuentra fórmulas para cambiar de grados a radianes y de radianes a grados y úsalas para calcular

   a. 1 grado = radianes b. 1 radian = grados

3. Calcula lo mejor que puedas sin usar nada mas que un círculo y una regla. *Los ángulos están en radianes*

   a. sen(1), cos(1) y tan(1) b. sen(2), cos(2) y tan(2) c. sen(-3), cos(-3) y tan(-3)

4. ¿Que diferencia hay entre las trayectorias $p(t)=(\cos(t),\text{sen}(t))$ y $q(t)=(\text{sen}(t),\cos(t))$?

5. ¿Es cierto que si $t < t'$ entonces $\text{sen}(t) < \text{sen}(t')$? ¿Y que $\cos(t) < \cos(t')$?

6. Esboza la gráfica de la función sec(t) y di en que intervalos es invertible.

7. ¿Que funciones dan las coordenadas de un punto que gira en un círculo de radio 4 centrado en (1,2), en el sentido de las manecillas del reloj y da 5 vueltas en cada unidad de tiempo?

8. ¿Que trayectoria sigue un punto de la rueda de ferrocarril cuando la rueda gira? Da las funciones que dan su desplazamiento vertical y horizontal, suponiendo que la rueda tiene 1m de diámetro y que avanza 1m por segundo, si el punto se encuentra hasta abajo en t=0,

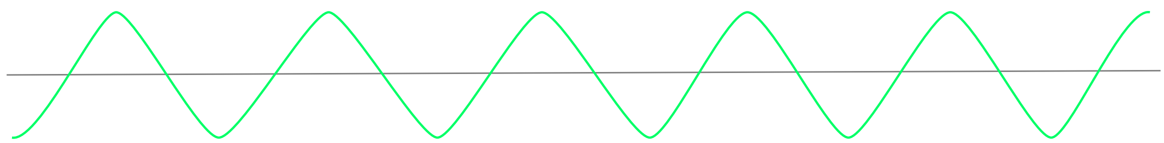
9. Dibuja sin ayuda electrónica y en el mismo lugar las funciones

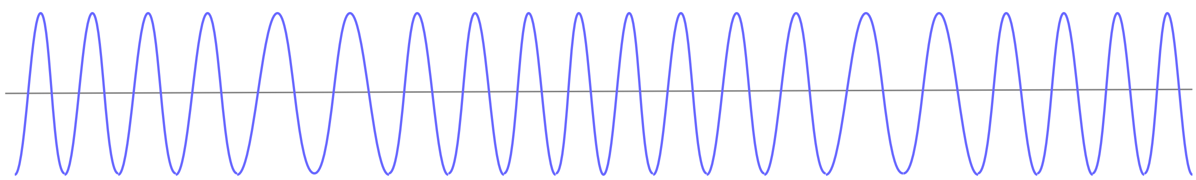
cos(x)    cos(x/2)    2cos(x/2)    cos(2x)/2

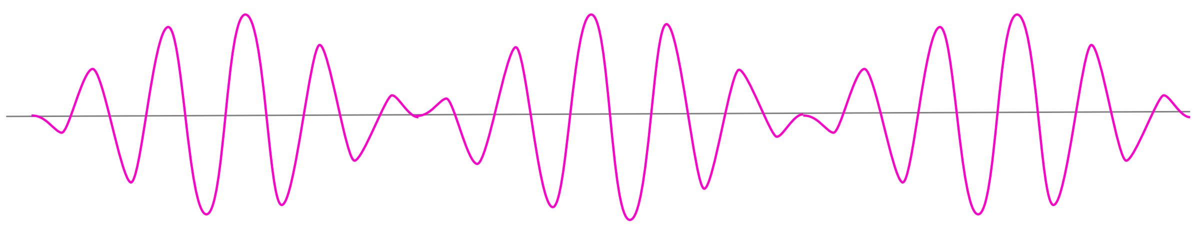
10. Dibuja en la computadora las gráficas de las siguientes funciones (pueden usar por ejemplo https://rechneronline.de/function-graphs/) Traten de adivinar como se verán antes de hacerlo

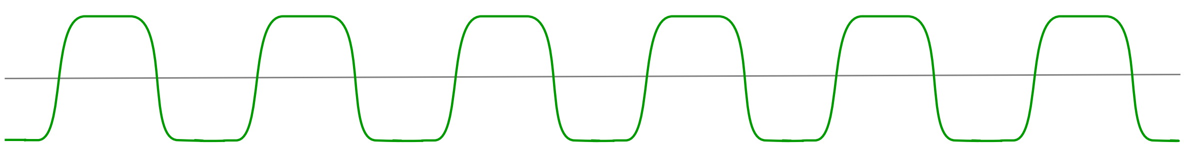
a. $f(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$    b. $g(x) = 3\cos(x) + \sin(4x)$    c. $h(x) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(3x)$

11. ¿Puedes dar funciones cuyas gráficas se vean mas o menos así?
Imagina que funciones podrían ser y compruébalo con ayuda electrónica.

a.


b.


c.


d.*


12. Grafica las funciones $f_a(x) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x+a)$ para distintos valores de $a$ empezando cerca de $0$ y acabando cerca de $\pi$ ¿puedes explicar lo que esta pasando?

# Funciones exponenciales

Hay otros tipos de funciones que aparecen mucho en las ciencias naturales.

Ejemplo. El número de bacterias en un cultivo se duplica cada minuto, ¿cuanto habrá crecido a los 3 minutos? A los 10 minutos? Al medio minuto? A los 5 minutos y 20 segundos?

A los 3 minutes se habrá duplicado 3 veces, así que se habrá multiplicado por 8.

A los 10 minutos se habrá duplicado 10 veces así que se habrá multiplicado por $2^{10}=1024$.

Para el medio minuto hay que pensar mas: si se multiplicara por 1.5 entonces habría que esperar que en el siguiente medio minuto se multiplicara otra vez por 1.5, así que al cabo de 1 minuto se habría multiplicado por 1.5x1.5=2.25 y no por 2. Esto sugiere que al medio minuto mas bien tendría que haberse multiplicado por $\sqrt{2}$.

Y para que en 1 minuto se multiplicara por 2 en 20 segundos tendría que multiplicarse por $\sqrt[3]{2}$.

En el ejemplo anterior el número de bacterias en el tiempo $t$ (medido en minutos) será $2^t$ veces el mayor al inicial. La función $f(t) = 2^t$ está definida para todos los valores racionales de $t$ : $2^{m/n} = \sqrt[n]{2^m}$

¿Y tendrá sentido para valores irracionales? ¿que querrá decir por ejemplo $2^{\sqrt{3}}$ o $2^{\pi}$?

Las **funciones exponenciales** son las funciones de la forma $f(x)=a^x$, donde $a$ es un número real mayor que 0 y distinto de 1. En principio están definidas para los valores racionales de $x$, pero pueden extenderse a todos los valores reales de $x$ aproximándolos con racionales y viendo a donde se aproximan las potencias.

Las funciones exponenciales sólo toman valores positivos, así que son funciones de **R** a $\mathbf{R}^+$.

Si $a>1$ la función exponencial $a^x$ es creciente.y si $a<1$ la función exponencial $a^x$ es decreciente.

La propiedad mas importante de las funciones exponenciales $f(t)=a^t$ es que en cada unidad de tiempo sus valores se multiplican por la misma constante $a$.

Ejercicio. En el año 2000 la población de México crecía aproximadamente 2% al año.

¿A ese ritmo, cuanto tardaría en duplicarse?¿Y en multiplicarse por 10?

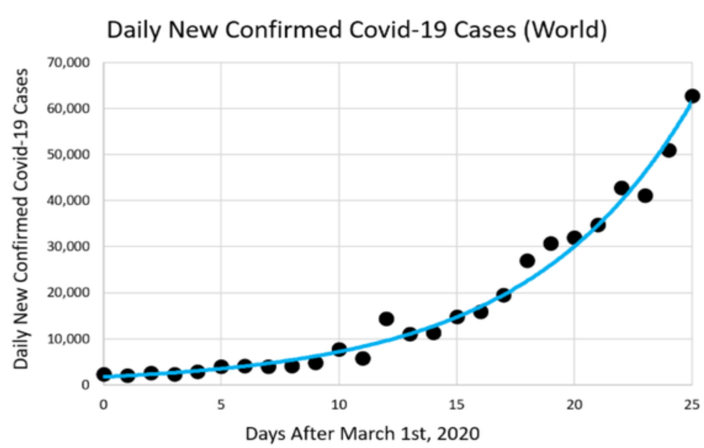
Si la población crece al 2% anual entonces cada año se multiplica por 1.02, y en t años se multiplica por $(1.02)^t$.

Para saber cuanto tarda en duplicarse necesitamos saber el valor de t tal que $(1.02)^t=2$, que es aproximadamente 35.

Y para saber cuanto tarda en multiplicarse por 10 necesitamos saber el valor de $t$ tal que $(1.02)^t=10$ (aprox 117)

El crecimiento exponencial también ocurre en las epidemias.

Ejemplo. La función dada en la gráfica azul, que aproxima a los valores dados por los puntos negros, es de la forma $f(t)=c\cdot a^t$, donde $c$ y $a$ son constantes y $t$ se mide en días ¿Cuales serán los valores de $a$ y de $c$?




Si $t$ aumenta en 1 e valor de la función $f(t)=c\cdot a^t$ se multiplica por $a$ así que si $t$ aumenta en 5 el valor de la función $f(t)=c\cdot a^t$ se multiplica por $a^5$.

Como $f(10)\approx 8000$ y $f(15)\approx 15000$ entonces

$a^5\approx f(15)/f(10) \approx 15000/ 8000 \approx 1.875$

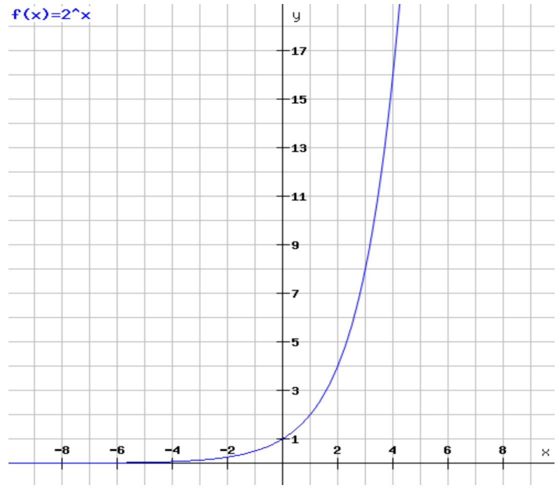
por lo que $a \approx \sqrt[5]{1.875} \approx 1.134$ así que $f(t)\approx c\cdot 1.134^t$.

Como $f(10)\approx 8000\approx c\cdot 1.134^{10}\approx c\cdot 3.517$ entonces

$c \approx 8000/3.517 \approx 2274$ y la función es $f(t) \approx 2274 \cdot 1.134^t$.
Ojo: como los valores de f son solo aproximados, al tomar valores de f podemos obtener otros valores para c y a.

Las funciones exponenciales $a^x$ es con $a>1$ son crecientes, y eventualmente crecen muy rápido aunque $a$ solo sea un poco mayor que 1.
La gráfica de la derecha es de la función $f(x)=2^x$

Las gráficas de todas las funciones exponenciales con $a>1$ son iguales salvo reescalamientos, ya que si $b=a^c$ entonces $b^t = (a^c)^t = a^{ct}$

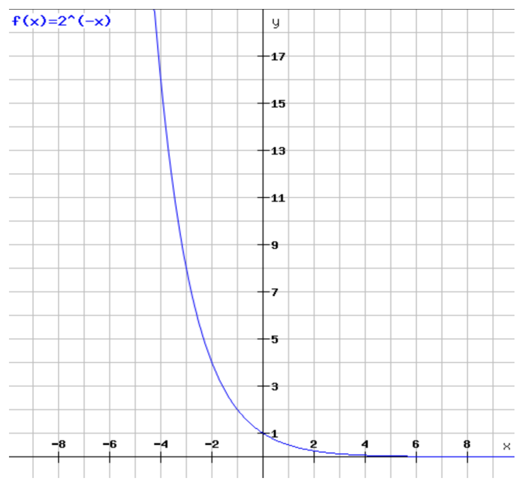



Las funciones $a^x$ con $a<1$ son decrecientes, y son recíprocas de las funciones exponenciales $(1/a)^x$ con $1/a<1$

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x} = (1/a)^{-x}$$

Así que la gráfica de $a^x$ se obtiene reflejando la de $(1/a)^x$ en el eje y. Por ejemplo, la gráfica de $(1/2)^x = 2^{-x}$ se obtiene reflejando la gráfica de $2^x$ en el eje vertical.

Las gráficas de todas las funciones exponenciales con $a<1$ son iguales salvo reescalamientos.




Un buen ejemplo de decrecimiento exponencial es el decaimiento radiactivo. Los materiales radiactivos se degradan a una velocidad que es proporcional a la cantidad restante (la constante de depende del material). La *vida media* de un elemento es el tiempo que tarda en reducirse a la mitad.

Ejemplo. La vida media del tritio es 12.3 años.
¿Cuanto queda después de 24.6 años? Se habrá reducido a la mitad 2 veces, así que queda la cuarta parte.
¿Cuanto quedará después de t años? Se habrá reducido a la mitad $t/_{12.3}$ veces, así que quedará $1/2^{t/12.3}$ del original.
¿Cuanto queda después de 20 años? $1/2^{20/12.3} \approx 1/2^{1.626} \approx 0.324$ de la cantidad original.
¿Cuanto tardará en reducirse a la décima parte? Necesitamos hallar el valor de $t$ tal que $1/2^{t/12.3} \approx {}^1/_{10}$.

El carbono 14 es una forma radioactiva del carbono, con una vida media de 5730 años. Se usa para saber que tan antigua es una muestra de material orgánico, ya que una fracción mas o menos constante del carbono que forma a todos los seres vivos es carbono 14, pero al morir el carbono 14 empieza a degradarse y la fracción empieza a disminuir.

Ejercicio.

¿Que fracción de carbono 14 queda después de 1000 años?

La fracción a los t años es $2^{-t/5730}$ después de 1000 años queda $2^{-1000/5730} \approx 2^{-0.1745} \approx 0.886$

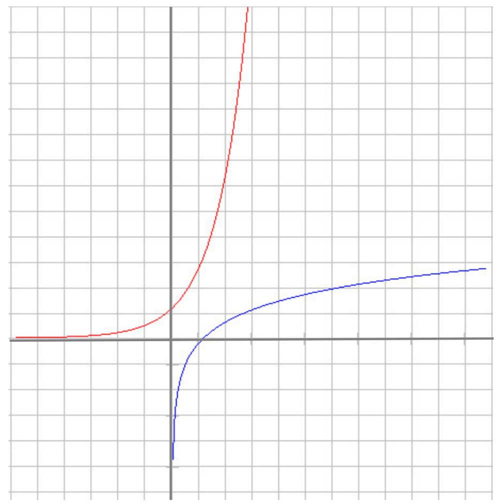
¿Si la fracción de carbono 14 ha disminuido a la mitad, que tan antigua será la muestra? Aprox. 5730 años

¿y si la fracción ha disminuido a 1/3? Necesitamos hallar el t tal que $2^{-t/5730} \approx 1/3$

En varios de los problemas anteriores necesitamos saber en que momento la función exponencial $f(t) = a^t$ toma un valor dado $b$, es decir el valor de $t$ tal que $a^t=b$. Vamos a ver como hacerlo.

Como las funciones exponenciales $a^x$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ son funciones crecientes cuando $a>1$ y decrecientes cuando $a<1$ entonces siempre son invertibles.

La inversa de la exponencial $a^x$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ es llamada *logaritmo en base a* y es denotada por $\log_a$: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$.



Como $\log_a$ es la inversa de $a^x$, la gráfica de $\log_a$ se obtiene reflejando la grafica de $a^x$ en la diagonal.

La función $\log_a$ nos da el exponente al que hay que elevar $a$ para obtener cualquier número positivo:

$$\log_a(y) = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = y$$

Ejemplos.

$\log_2(8) = 3$ ya que $2^3=8$ $\quad$ $\log_{10}(1/100) = -2$ ya que $10^{-2}=1/100$ $\quad$ $\log_8(\sqrt{2}) = 1/6$ ya que $8^{1/6}= \sqrt{2}$

## Propiedades de las exponenciales y los logaritmos.

Las funciones exponenciales convierten sumas en productos y productos en potencias:

Si $a>0$ y $r$ y $s$ son dos números reales entonces

$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s$$
$$a^{rs} = (a^r)^s$$

Ejemplo. Si $a^x=3$ y $a^y=5$ entonces

$a^{2x} = 3^2$ $\quad$ $a^{-x} = {}^1/_3$ $\quad$ $a^{y/3} = \sqrt[3]{5}$ $\quad$ $a^{x+y} = 3\cdot 5$ $\quad$ $a^{x-y} = {}^3/_5$

Las funciones logarítmicas convierten productos en sumas y potencias en productos.

Si $a>0$ y $u$ y $v$ son dos números reales *positivos* entonces

$$\log_a(uv) = \log_a(u)+\log_a(v)$$
$$\log_a(u^v) = v\cdot\log_a(u)$$

Estas propiedades se siguen de las propiedades de las exponenciales.

Ejemplo. Si $a^x=3$ y $a^y=5$ entonces

$\log_a 3 = x$ $\quad \log_a {}^1/_3 = -x$ $\quad \log_a\sqrt{3} = x/2$ $\quad \log_a 27 = 3x$ $\quad \log_a 15 = x+y$ $\quad \log_a {}^5/_3 = y-x$ $\quad \log_a {}^{27}/_{25} = 3x-2y$

Usando las propiedades de las exponenciales y los logaritmos podemos escribir a las funciones exponenciales en otras bases:

Si $a$ y $b$ son reales positivos entonces $b = a^{\log_a b}$ así que $b^x = (a^{\log_a b})^x = a^{(\log_2 3)x}$

Ejemplos.

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$

$(1/2)^x = 1/2^x = 2^{-x}$

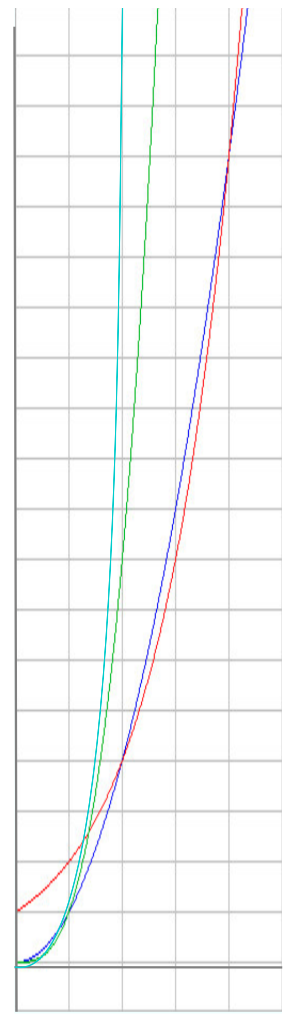
$3^x = (2^{\log_2 3})^x = 2^{(\log_2 3)x}$

¿Que tan distintas son las funciones exponenciales y las funciones polinomiales

Ejemplo. ¿Como se compara $2^x$ con $x^2$? ¿con $x^3$? ¿Y con $x^4$?

Tabulemos algunos valores de las funciones para ver si le ganan a la exponencial (donde le ganan están marcados con colores)

| $x$ | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $2^x$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 4 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 8 |
| 4 | 16 | 64 | 256 | 16 |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 32 |
| 6 | 36 | 216 | 1296 | 64 |
| 7 | 49 | 343 | 2401 | 128 |
| 8 | 64 | 512 | 4096 | 256 |
| 9 | 81 | 719 | 6561 | 512 |
| 10 | 100 | 1000 | 10000 | 1024 |
| 20 | 400 | 8000 | 160000 | 1048576 |
| 30 | 900 | 27000 | 810000 | 1073741824 |
| 40 | 1600 | 64000 | 2560000 | 1099511627776 |
| 50 | 2500 | 125000 | 6250000 | 1125899908942624 |



Ejercicio. ¿Como para que valor de x es que $2^x$ rebasa a $x^{10}$?

Respuesta: antes de 100

Las función exponencial $2^x$ eventualmente crece muy rápido, mas que cualquier polinomio.
Y lo mismo es cierto para cualquier función exponencial $a^x$ con $a>1$, por ejemplo $1.001^x$.

## Problemas.

13. Si un virus se duplica cada 10 minutos, ¿cuanto habrá aumentado a los 15 minutos? ¿A los 32.5 minutos?

14. La población de una ciudad aumenta en un décimo cada año. ¿Cuanto tardará en duplicarse?¿Y en multiplicarse por 10?

15. Si un elemento radiactivo se reduce a un tercio en 3 años, cuanto queda en 1 año? ¿Y en 5 años? ¿cual es su vida media?

16. Calcula sin calculadora

| | | | |
|---|---|---|---|
| $8^{2/3}=$ | $8^{-1/3}=$ | $3^{-1/2}=$ | $(1/2)^{-3}=$ |
| $\log_3 9=$ | $\log_4 1/2=$ | $\log_5 1=$ | $\log_7 \sqrt{7}=$ |

17. Trata de adivinar como cuanto valen (dí algo como entre 1 y 1.5, o entre 2 y 3, etc.) y compara tus resultados con los obtenidos con calculadora

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{2}^2=$ | $2^{\sqrt{2}}=$ | $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}=$ | $2^{\pi}=$ |
| $\pi^{\sqrt{2}}=$ | $\pi^{\pi}=$ | $\pi^{1/\pi}=$ | $\pi^{-\pi}=$ |

18. Si $2^x=3$ y $2^y=7$ di cuanto valen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $2^{4x}=$ | $2^{-y}=$ | $2^{y/5}=$ | $2^{x+y}=$ | $2^{x-y}=$ |
| $\log_2 3=$ | $\log_2 21=$ | $\log_2 3/7=$ | $\log_2 \sqrt{63}=$ | |

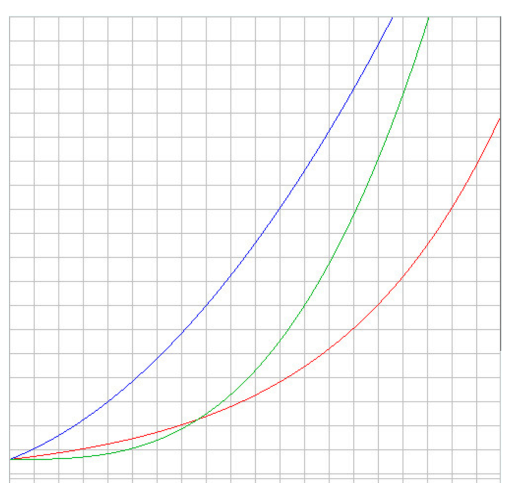
19. Muestra que si $f(x)$ es una función exponencial entonces $f(-x)$, $f(1/x)$ y $1/f(x)$ también son funciones exponenciales (esto no es cierto para funciones polinomiales, excepto en un caso)

20. Escribe a las siguientes funciones exponenciales en la forma $2^{cx}$ para alguna constante $c$.

a. $8^x$ b. $(1/2)^x$ c. $\sqrt{2}^x$ d. $5^x$ e. $5^{2x}$

21. ¿Habrá algún valor de x en que $1.1^x$ rebase a $x^{10}$?

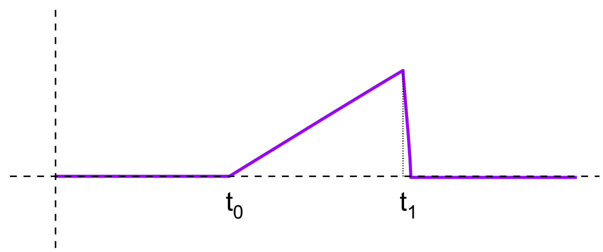
22. ¿Cuales de estas gráficas corresponden a funciones exponenciales y cuales no?
Hint: ¿como crecen en intervalos de tiempo iguales?



Otras funciones

Las funciones que hemos considerado (polinomiales, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas) se comportan bien: no cambian súbitamente y podemos predecir que harán, pero hay funciones mas feas.

Ejemplo. La velocidad de un objeto que se deja caer en el momento $t_0$ y llega al piso en el momento $t_1$:



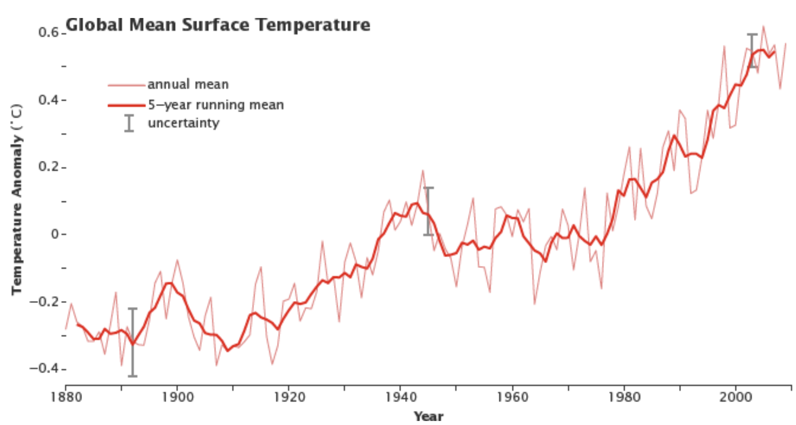

Un cambio brusco en la función indica que las condiciones cambiaron de pronto.

Ejemplo. La función que da el signo de un número

$$s(x)= \begin{cases} -1 & \text{si x es negativo} \\ 0 & \text{si x=0} \\ 1 & \text{si x es positivo} \end{cases}$$

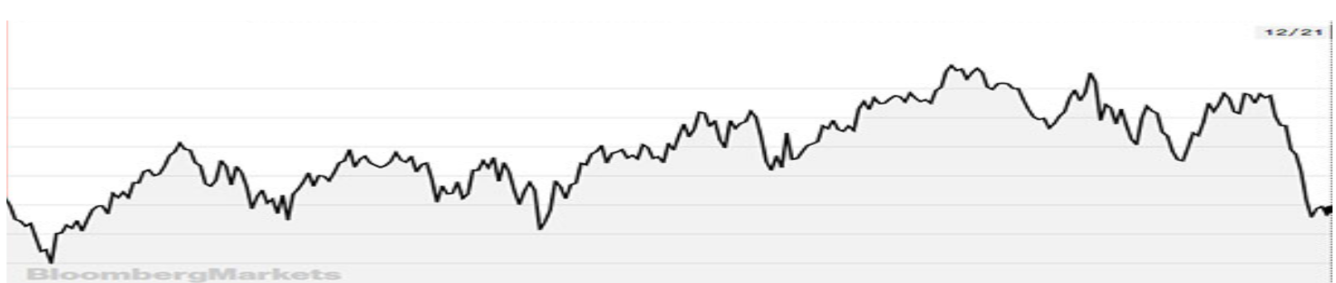
Hay otras funciones que se comportan peor, donde las condiciones cambian todo el tiempo

Ejemplo. La temperatura promedio en la tierra en los últimos 160 años (desde que hay registros)



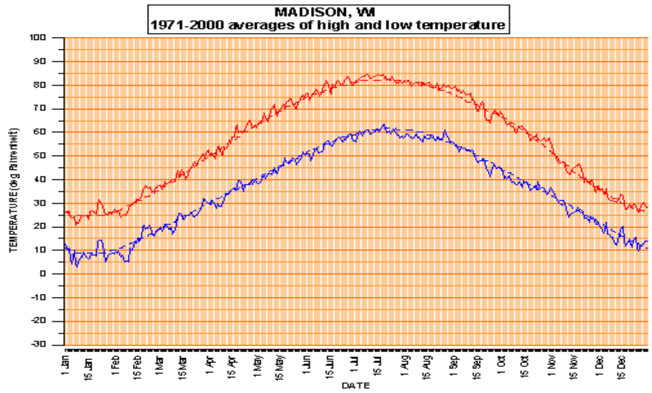

Ejercicio.¿Como definirían una función real que indique en cada momento si está lloviendo en la Fac o no? ¿Como se verá la gráfica de una función así?

Ejemplo. La bolsa de valores

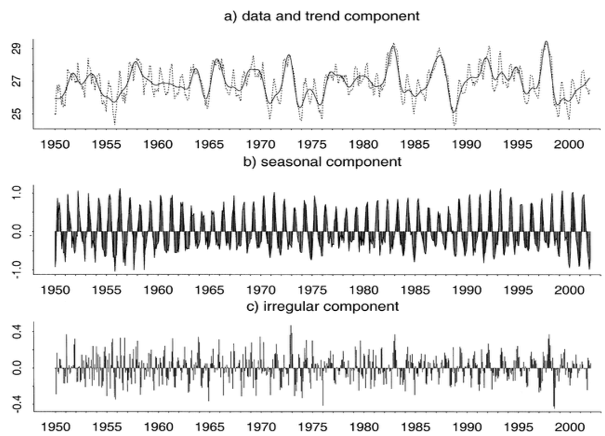


En estas funciones el azar juega un papel importante que las hace hasta cierto punto impredecibles
¿Será posible separar el ruido (el azar) del fondo, de modo que podamos tener una idea de cuanto valen?
¿podremos partir a estas funciones como combinaciones de funciones predecibles y otras aleatorias?

Ejemplo. Temperaturas en una fecha fija (promedio a lo largo de 30 años)




Ejemplo. Variaciones de la temperatura (promedio estacional) a lo largo del tiempo




Funciones cuyas gráficas ni siquiera se pueden dibujar

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x es racional} \\ 0 & \text{si x es irracional} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{si x es la fracción } \textit{reducida} \text{ p/q} \\ 0 & \text{si x es irracional} \end{cases}$$

Tarea: esta función es periódica.

Aunque es posible predecir con exactitud la posición de los planetas y cuando ocurrirán los eclipses dentro de 1000 años, pero es imposible saber la posición de un electrón en un átomo aunque estemos viendo al átomo.